STRUČNÝ OBSAH DODATKU K MAPSsT

Dodatek k Modální analýze poddajných soustav s tlumením (MAPSsT) je zaměřen na řešení problémů s nesymetrickými maticemi tuhosti a tlumení $[\mathbf{K} + i\mathbf{H}']$ a $\mathbf{B}$.

Tak jako matice jsou symetrické a nesymetrické, tak i operace s nimi (rozklady, transformace souřadnic) lze rozdělit na symetrické a nesymetrické. (např. Choleskiho rozklad $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ je symetrický, $\mathbf{LU}$ rozklad nesymetrický, rozklad $\mathbf{L}^H\mathbf{L}$ nepoužitelný, transformace ${}^T\mathbf{VAV}$ symetrická, podobnostní transformace $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{P}$ v obecném tvaru nesymetrická, atp.)

V MAPSsT na str. 33 je poznámka 16 a v ní je napsáno, že nesymetrická matice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ a symetrická matice $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\,{}^T\mathbf{L}^{-1}$ jsou podobné.
(Podobnostní transformaci podle §3 lze při $\det[\mathbf{M}] \neq 0$ a $\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{M}$ snadno odvodit.)

Otázkou je:

a) zda ke každé nesymetrické matici existuje jí podobná matice symetrická,

b) zda tuto matici lze vypočítat s rozumným vynaložením paměti a času počítače i v případě velkých matic 2n > 2000 úsporně uložených v paměti.

Cíl je zřejmý. Přes podobnostní transformaci se dostat k symetrickým maticím. Těm lze přiřadit mnohem efektivnější postupy řešení vlastních hodnot, než k maticím nesymetrickým.

Z provedených odvození ověřených programováním vyplývá, že:

ad(a) ano, existuje.
Omezující podmínky jsou jenom takového typu, jako výše uvedená ▲▲,
že matice $\mathbf{M}$ a $[\mathbf{K}+\mathbf{B}+\mathbf{M}]$ musejí být regulární, aby byly rozložitelné.
Symetrický Choleskiho rozklad ale musí být nahrazen rozkladem nesymetrickým.

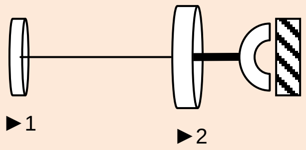
ad(b) ano, jde to.
Potřeba paměti a počítačového výkonu je sice asi 2x větší, než u úloh se symetrickými maticemi, ale to je i pro velké úlohy pořád ještě snesitelné.

A z toho plyne:
Jestli k symetrickým maticím přednostně patří i symetrické operace výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů (jako je např. QR transformace, neboť nesymetrické transformace k vlastním vektorům nevedou), pak výsledkem řešení nikdy nemůže být nesymetrická spektrální matice Jordanovského typu.
Tak jako u metody SI (viz str. 62 MAPSsT) budou k násobným vlastním číslům patřit nezávislé, nejčastěji (bi)unitární vlastní vektory.

A z toho dále vyplývá, že spektrální matice Jordanovského typu je výsledkem (nebo spíše následkem) použitých metod výpočtu, nikoli vlastností řešené soustavy pohybových rovnic.

Jan MAREK

Zadání následujícího příkladu odpovídá modifikaci *PŘÍKLADU 5* ze str. 48 MAPSsT, použitá metoda je inverzní s posunutím spektra o jedničku :




```
   100.00000      -99.000000        NESYMETRICKÁ MATICE KK
  -101.00000       100.00000


   0.0000000                        MATICE BB
                   2.0000000


   1.0000000                        MATICE MM
                   3.0000000


ÚTLUM a Vl. FREKVENCE [rad/s]     PO 23 QD ITERACICH:
   0.5051024E-02   0.4952675       0.8317405E-01   0.8317405E-01  ÚTLUM
   0.3579797E-16  -0.1915162E-14   -11.54299        11.54299      VL. FREKVENCE

ÚTLUM a VLASTNÍ FREKVENCE PO 5 ITERACICH QR
   0.5051024E-02   0.4952675       0.8317405E-01   0.8317405E-01
   0.9070853E-16  -0.5110581E-15   -11.54299        11.54299


 KONTROLA TW*NN*V ( SPEKTRÁLNÍ MATICE )
   0.9949744      -0.2140603E-15   0.8137420E-13   0.8124774E-13
  -0.3130084E-16   0.8374814E-13   0.3580823E-13  -0.3558034E-13

  -0.1230397E-16   0.6687766      -0.1497733E-13   0.1480841E-13
  -0.4221656E-13   0.8822223E-17   0.2910824E-13   0.2919335E-13

  -0.3564729E-13  -0.2400153E-14   0.8058494E-02   0.9925883E-14
  -0.6931440E-14   0.1269388E-13   0.8587645E-01  -0.5376312E-14

  -0.3575761E-13   0.2520147E-14   0.9958926E-14   0.8058494E-02
   0.6803775E-14   0.1280220E-13   0.5401949E-14  -0.8587645E-01


 KONTROLA TW*PPaNN*V ( JEDNOTKOVÁ MATICE )
    1.000000      -0.1092495E-15   0.8056265E-13   0.8047848E-13
  -0.3145895E-16   0.8535174E-13   0.3306735E-13  -0.3281658E-13

   0.8617820E-16    1.000000      -0.4265651E-13   0.4232027E-13
  -0.4582362E-13   0.1319158E-16   0.3021621E-13   0.2965627E-13

  -0.4310811E-13   0.7468532E-13    1.000000      -0.2396733E-13
  -0.2048822E-13  -0.3241741E-13  -0.3858025E-13  -0.8962242E-13

  -0.4319784E-13  -0.7507974E-13  -0.2438607E-13    1.000000
   0.2045253E-13  -0.3300117E-13   0.8955620E-13   0.3891332E-13
```

```
ÚTLUM a VLASTNÍ FREKVENCE PO 5 ITERACICH QR
  0.5051024E-02   0.4952675       0.8317405E-01   0.8317405E-01
  0.9070853E-16  -0.5110581E-15   -11.54299        11.54299


VLASTNÍ VEKTORY LEVOSTRANNÉ, NORMOVANÉ "NA JEDNIČKU"
   1.000000        1.000000        1.000000        1.000000
   0.000000        0.000000        0.000000        0.000000

  0.9900993       0.9925276      -0.3290472      -0.3290472
  0.5312902E-17   0.2107691E-16  -0.1901144E-01   0.1901144E-01

 -0.5051024E-02  -0.4952675      -0.8317405E-01  -0.8317405E-01
 -0.1033271E-15  -0.6024615E-15    11.54299        -11.54299

 -0.5001016E-02  -0.4915667       0.2468171       0.2468171
 -0.1373954E-15   0.3549593E-15   -3.796608        3.796608


VLASTNÍ VEKTORY PRAVOSTRANNÉ, NORMOVANÉ "NA JEDNIČKU"
  0.9899997       0.9875776       1.000000        1.000000
 -0.9660495E-17  -0.7465776E-16    0.000000        0.000000

   1.000000        1.000000      -0.3356946      -0.3356946
   0.000000        0.000000      -0.1939550E-01   0.1939550E-01

 -0.5000513E-02  -0.4891151      -0.8317405E-01  -0.8317405E-01
 -0.9910290E-16  -0.4635719E-15    11.54299        -11.54299

 -0.5051024E-02  -0.4952675       0.2518033       0.2518033
 -0.1298121E-15   0.4987957E-15   -3.873308        3.873308
```

Původní singularita matice **K** byla přičtením antisymetrické části porušena, jak je vidět. Avšak u takto jednoduchého příkladu není problémem singularitu (tj. závislost obou řádků) obnovit tím, že položíme $K_{12} = K_{11} K_{22} / K_{21}$:

```
  100.00000      -99.009901                    NESYMETRICKÁ MATICE KK PO OPRAVĚ
 -101.00000       100.00000


  0.0000000                                    MATICE BB
                  2.0000000


  1.0000000                                    MATICE MM
                  3.0000000
```

Je zajímavé, že po opravě zůstávají zachovány všechny vlastní frekvence symetrické úlohy, nejenom ta první, nulová (porovnej se str. 50 MAPSsT) . Avšak původně shodné levo- a pravostranné módy se rozdvojily na různé.

```
VLASTNÍ FREKVENCE PO 5 ITERACICH QR
  0.6439294E-14   0.5003123       0.8317718E-01   0.8317718E-01
  0.1511056E-15  -0.1027297E-14   -11.54310        11.54310
```

Ovšem u větší soustavy by podobná „kouzla s čísly“ nebyla jednoznačná, takže praktický význam má pouze zjištění, že na vlastní frekvence mají vliv obě části matice $\mathbf{K}_{sym} + \mathbf{K}_{asym}$.